

Istituzioni e didattica della matematica

Marina Cazzola (marina.cazzola@unimib.it)

12 aprile 2016



- Simmetria
- Modelli didattici
per le isometrie
- Uguali e diversi

Simmetria

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Modelli didattici per le isometrie

Asse di simmetria

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Definizione –

Chiamiamo **asse di simmetria** di una figura una retta che divide la figura in due parti uguali.

Asse di simmetria

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

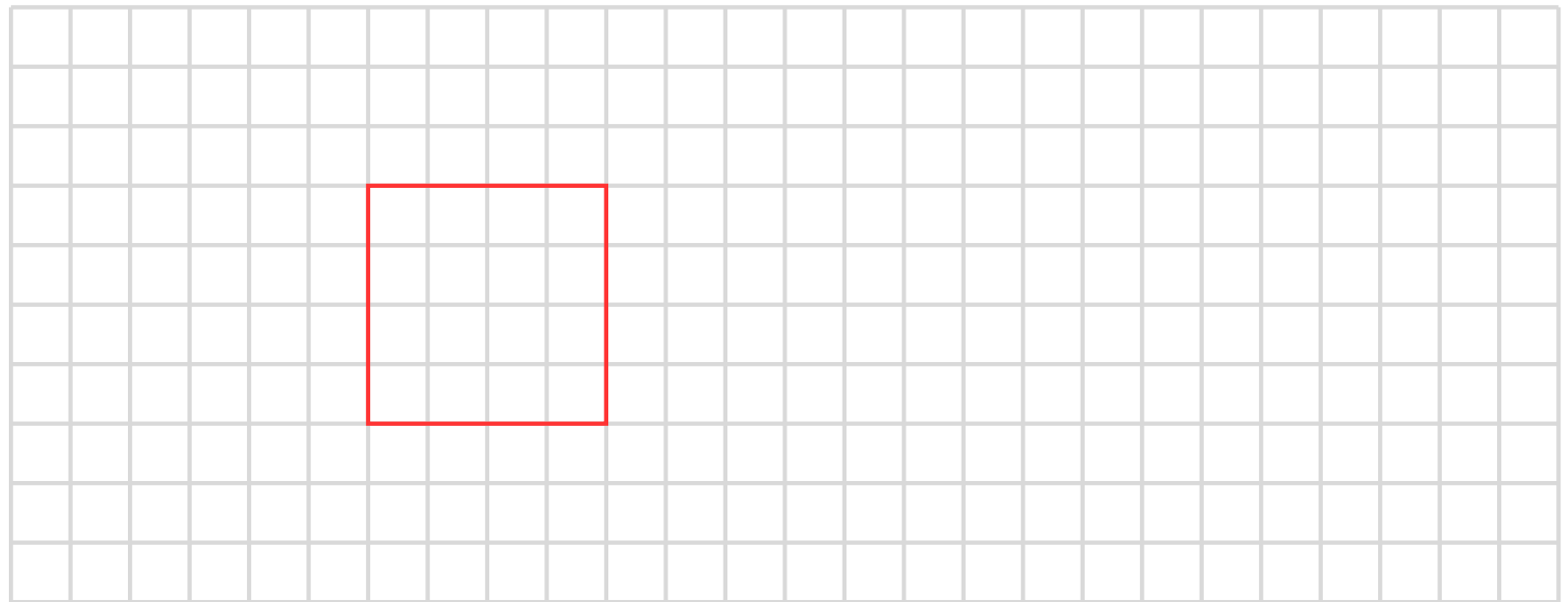
Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Definizione –

Chiamiamo **asse di simmetria** di una figura una retta che divide la figura in due parti uguali.



Asse di simmetria

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Definizione –

Chiamiamo **asse di simmetria** di una figura una retta che divide la figura in due parti uguali.



Asse di simmetria

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Definizione –

~~Chiamiamo **asse di simmetria** di una figura una retta che divide la figura in due parti uguali.~~



Centro di simmetria

Centro di simmetria

Definizione – Chiamiamo **centro di simmetria** di una figura un punto O per cui la rotazione di 180° attorno ad O è una simmetria della figura.

Centro di simmetria

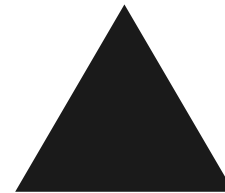
Definizione – Chiamiamo **centro di simmetria** di una figura un punto O per cui la rotazione di 180° attorno ad O è una simmetria della figura.

Questa definizione è coerente, pur essendo diversa da quella che abbiamo dato noi.

Centro di simmetria

Definizione – Chiamiamo **centro di simmetria** di una figura un punto O per cui la rotazione di 180° attorno ad O è una simmetria della figura.

Questa definizione è coerente, pur essendo diversa da quella che abbiamo dato noi.



Modelli didattici

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria
Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Nella pratica didattica spesso e volentieri si cercano modelli “concreti” per visualizzare concetti matematici astratti.

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Nella pratica didattica spesso e volentieri si cercano modelli “concreti” per visualizzare concetti matematici astratti.

Se da un lato questa è una pratica corretta, dall’altro richiede di porre molta attenzione nella scelta, affinché il modello scelto non risulti **fuorviante**.

Modelli didattici

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

- Quasi tutti i modelli “concreti” che abbiamo a disposizione sono giocoforza modelli tridimensionali, non sempre adatti a descrivere le peculiarità delle situazioni bidimensionali.

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria
Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria
Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

- Quasi tutti i modelli “concreti” che abbiamo a disposizione sono giocoforza modelli tridimensionali, non sempre adatti a descrivere le peculiarità delle situazioni bidimensionali.
- Le isometrie da noi definite sono trasformazioni *di tutto il piano*, mentre qualsiasi modello è giocoforza limitato ad una parte di piano.

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria
Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Le isometrie sono trasformazioni *di tutto il piano*: spesso si incontrano espressioni come riflessione “con asse interno alla figura”, piuttosto che “asse esterno alla figura”: questo è una tipica confusione dovuta all’errore di focalizzare l’attenzione su una singola figura.



Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria
Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

I modelli più diffusi sono basati sul “movimento”, mentre quello che ci interessa conoscere delle isometrie è in realtà solo un confronto tra la “fotografia” prima della trasformazione e la “fotografia” dopo la trasformazione.

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria
Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

I modelli più diffusi sono basati sul “movimento”, mentre quello che ci interessa conoscere delle isometrie è in realtà solo un confronto tra la “fotografia” prima della trasformazione e la “fotografia” dopo la trasformazione.

- lasciamo alla fisica occuparsi del movimento e non introduciamo in questo frangente una complicazione ulteriore

La grande ruota



La grande ruota

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



La grande ruota

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



Modelli non basati sul movimento

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Modelli non basati sul movimento

- rotazioni: uso della carta velina

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Modelli non basati sul movimento

- rotazioni: uso della carta velina
- riflessioni: piegature della carta

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Modelli non basati sul movimento

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

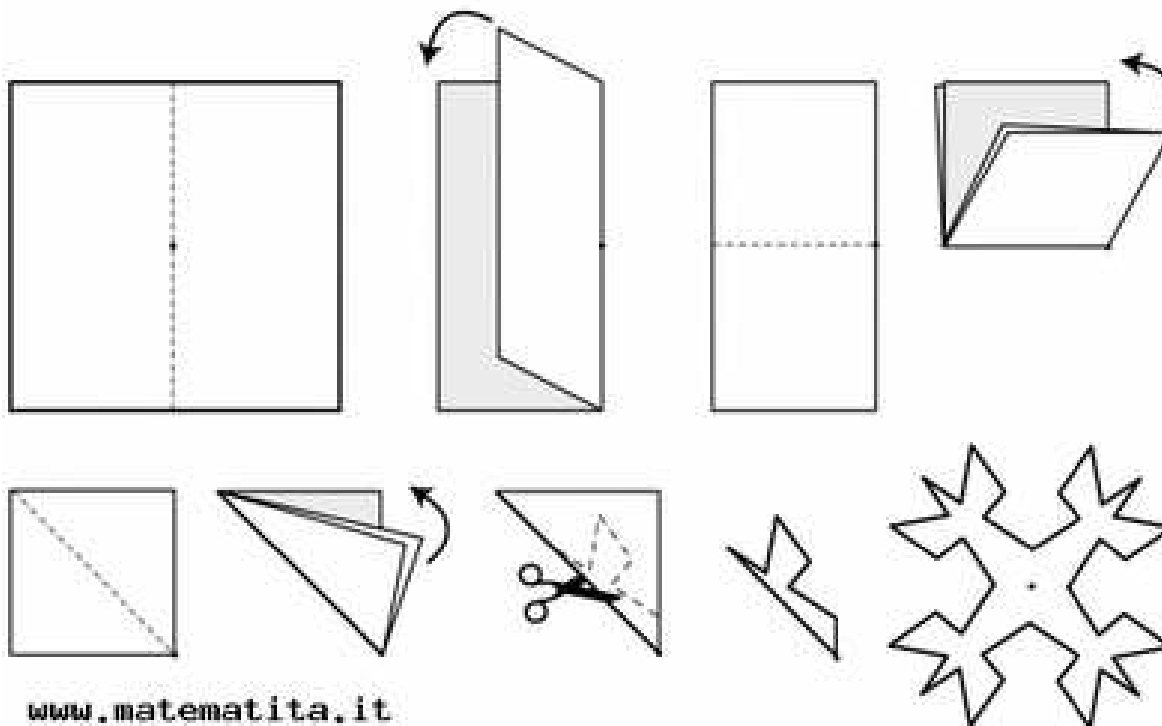
Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

- rotazioni: uso della carta velina
- riflessioni: piegature della carta



Piegature della carta

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

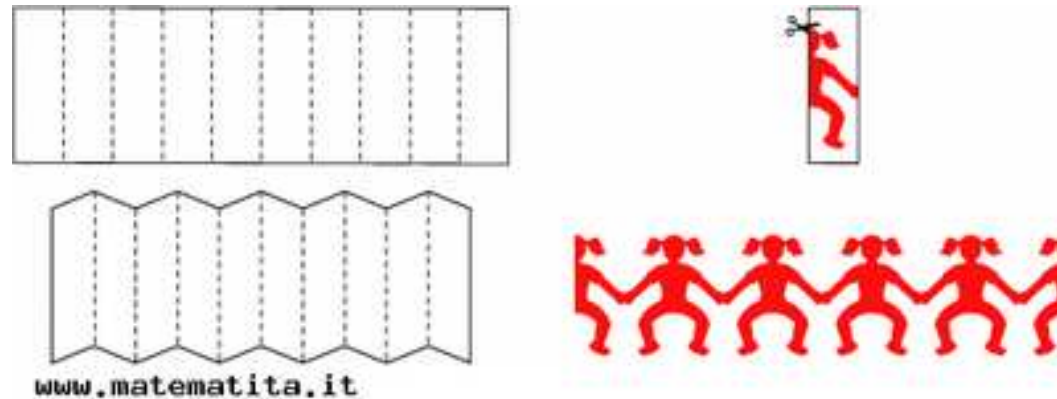
Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



(cfr. P. Bellingeri, M. Dedò, S. Di Sieno & C. Turrini, *Il ritmo delle forme. Itinerario matematico (e non) nel mondo della simmetria*, Mimesis, Milano, 2001, p. 68-76)

Piegature della carta

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



Piegature della carta

Simmetria

Modelli didattici per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



Piegature della carta

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



Piegature della carta

Simmetria

Modelli didattici per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



Piegature della carta

Simmetria

Modelli didattici per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



Piegature della carta

Simmetria

Modelli didattici per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



Piegature della carta

Simmetria

Modelli didattici per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



Piegature della carta

Simmetria

Modelli didattici per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



Modelli non basati sul movimento

Modelli non basati sul movimento

La mostra *Simmetria, giochi di specchi* propone un modello per le isometrie non basato sul movimento: gli specchi

Modelli non basati sul movimento

La mostra *Simmetria, giochi di specchi* propone un modello per le isometrie non basato sul movimento: gli specchi

L'utilizzo degli specchi, oltre ad avere un grosso impatto visivo, ha anche una forte giustificazione matematica:

Ogni isometria è composizione di al più tre riflessioni

Modelli non basati sul movimento

La mostra *Simmetria, giochi di specchi* propone un modello per le isometrie non basato sul movimento: gli specchi

L'utilizzo degli specchi, oltre ad avere un grosso impatto visivo, ha anche una forte giustificazione matematica:

Ogni isometria è composizione di al più tre riflessioni

<http://specchi.mat.unimi.it/>
(<http://www.matematita.it/materiale/>)

Rotazioni

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



Traslazioni

Simmetria

Modelli didattici per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

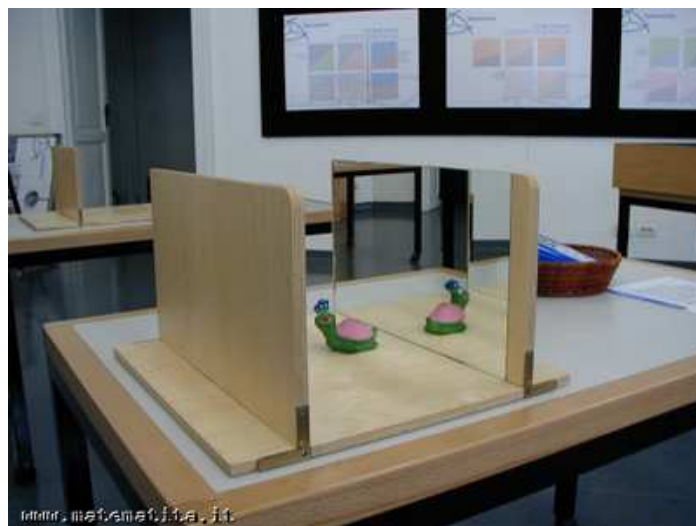
Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

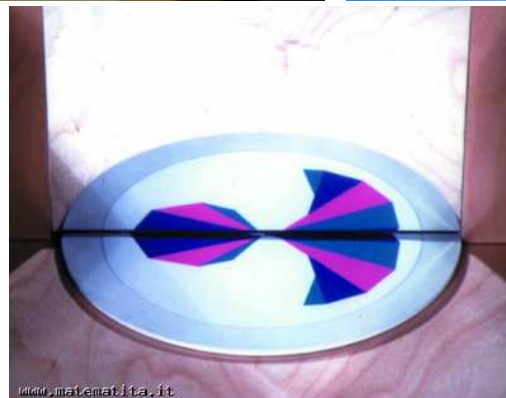
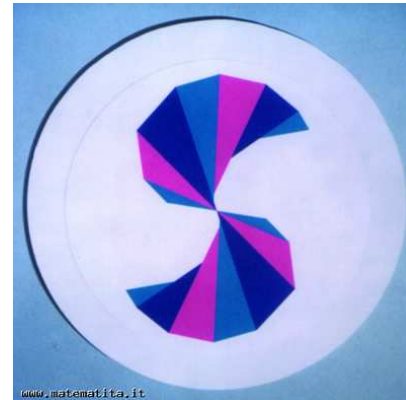
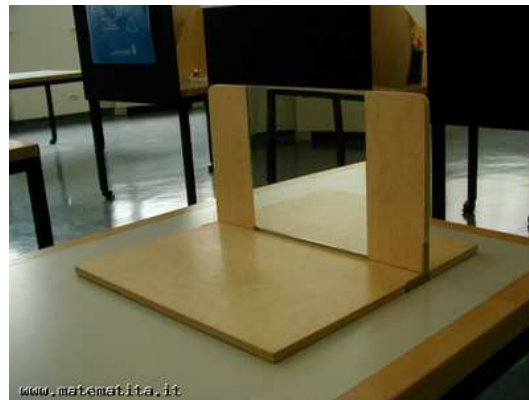
Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



Assi di simmetria

Uno specchio permette di riconoscere se una figura ammette o meno un asse di simmetria



Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Se pensiamo ai “classici” esercizi sulle formule per il calcolo delle aree, scopriamo che di fatto si utilizza la geometria delle isometrie

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria
Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

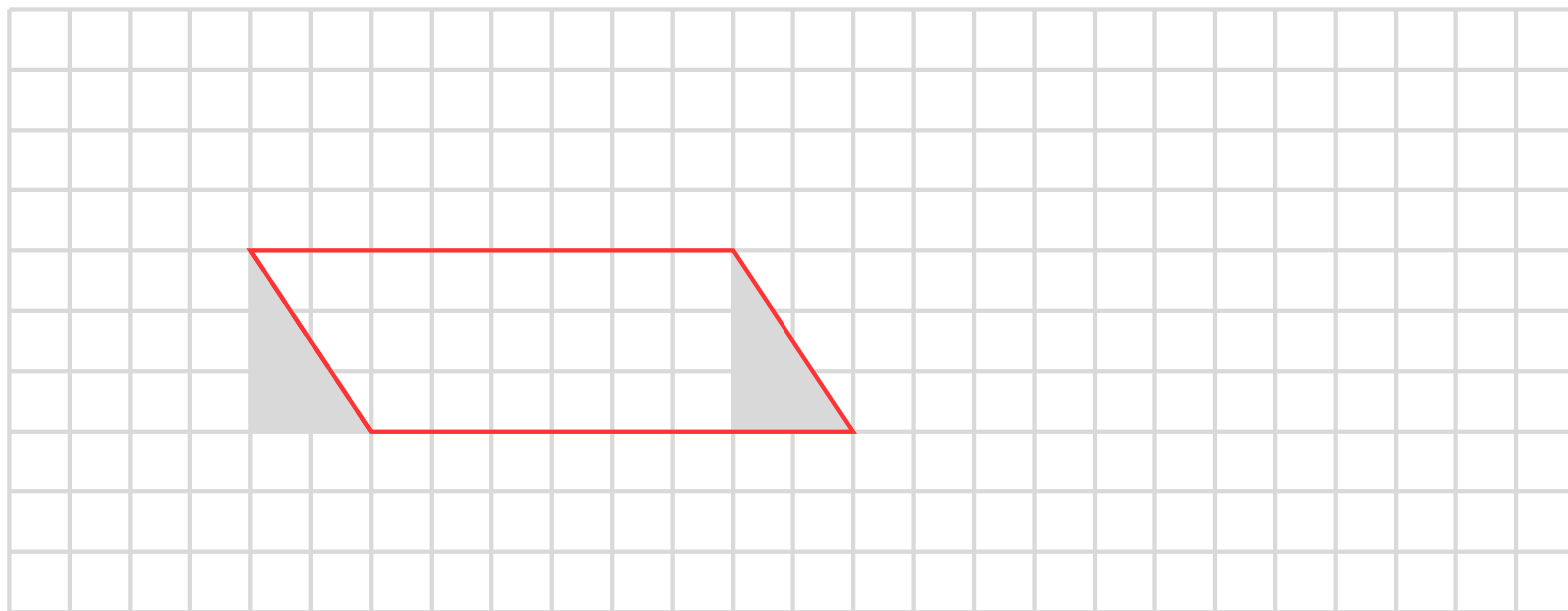
Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Se pensiamo ai “classici” esercizi sulle formule per il calcolo delle aree, scopriamo che di fatto si utilizza la geometria delle isometrie



Isometrie e aree

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria
Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

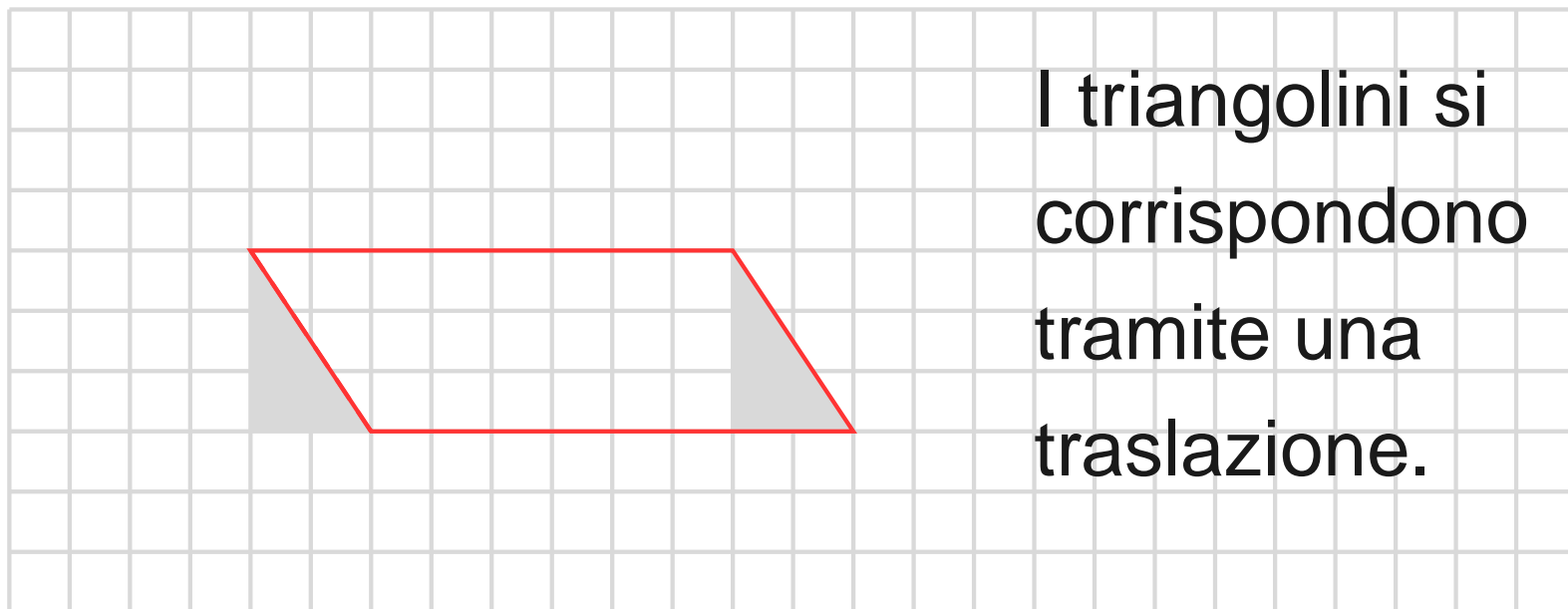
Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Se pensiamo ai “classici” esercizi sulle formule per il calcolo delle aree, scopriamo che di fatto si utilizza la geometria delle isometrie



Isometrie e aree

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Isometrie e aree

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



Isometrie e aree

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria

Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi



I trapezi si corrispondono tramite una rotazione.

Esperienze didattiche

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Asse di
simmetria
Centro di
simmetria

Modelli didattici

La grande ruota

Rotazioni

Traslazioni

Assi di simmetria

Esperienze
didattiche

Uguali e diversi

Esperienze didattiche sulla simmetria sono descritte nel testo

P. Caronnni, R. Ciani, P. Gilberti,
M. Rapuano & A. Vitali, *Conorovesciato. Un
esperimento di didattica per problemi nella
scuola primaria*, Materiale per i Quaderni a
Quadretti. Mimesis, 2007



Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Uguali e diversi

- Uguali e diversi
- La geometria
delle isometrie
- Uguali e diversi
- Gruppi e
equivalenze

Uguali e diversi

Uguali e diversi

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Uguali e diversi

Uguali e diversi

La geometria
delle isometrie

Uguali e diversi

Gruppi e
equivalenze

Uguali e diversi

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

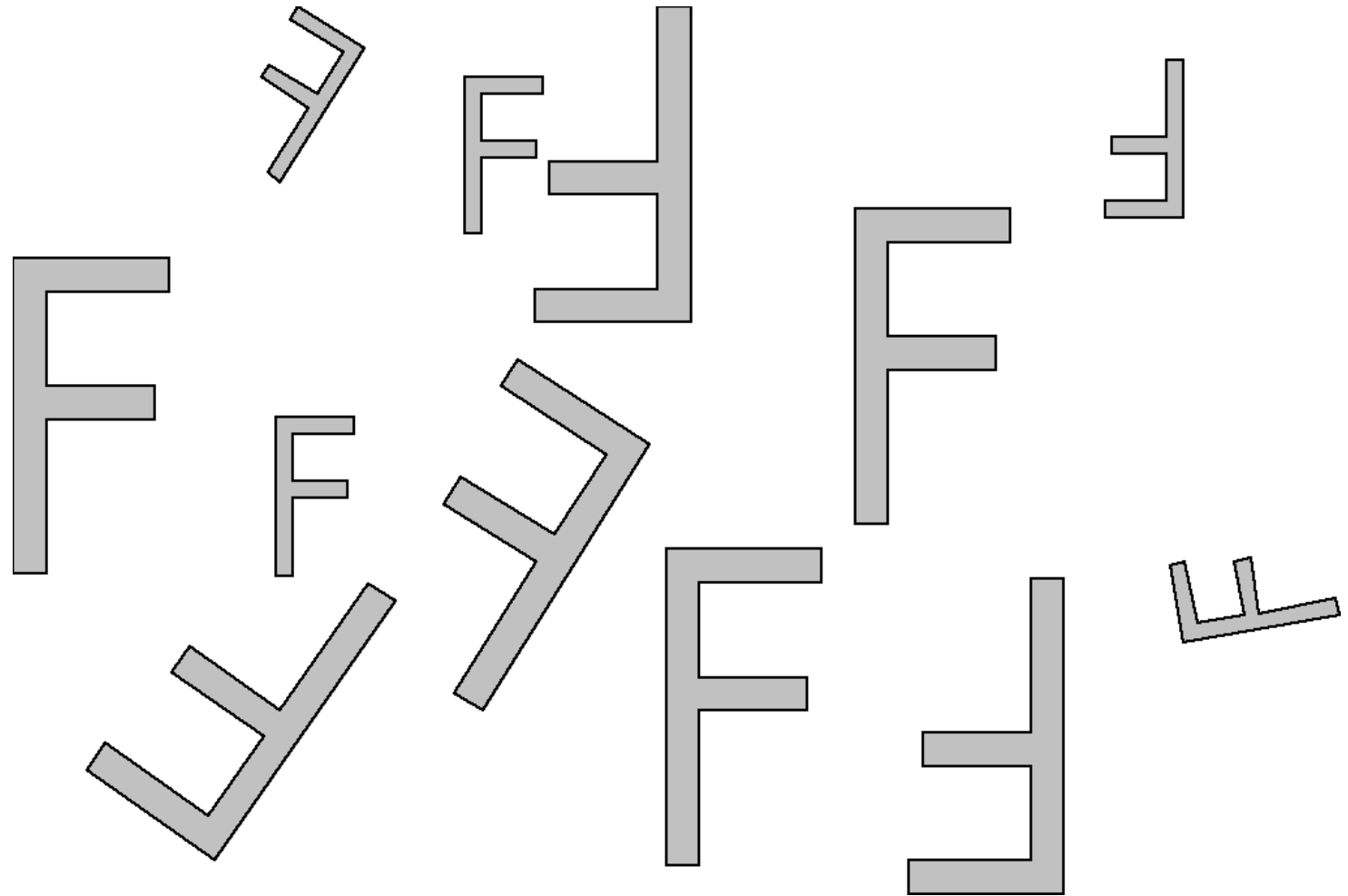
Uguali e diversi

Uguali e diversi

La geometria
delle isometrie

Uguali e diversi

Gruppi e
equivalenze



La geometria delle isometrie

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Uguali e diversi

Uguali e diversi

La geometria
delle isometrie

Uguali e diversi

Gruppi e
equivalenze

La geometria delle isometrie

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Uguali e diversi

Uguali e diversi

La geometria
delle isometrie

Uguali e diversi

Gruppi e
equivalenze

Due figure del piano sono **uguali** se è possibile costruire una **isometria** del piano che manda la prima figura nella seconda.

Uguali e diversi

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Uguali e diversi

Uguali e diversi

La geometria
delle isometrie

Uguali e diversi

Gruppi e
equivalenze

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Uguali e diversi

Uguali e diversi

La geometria
delle isometrie

Uguali e diversi

Gruppi e
equivalenze

In matematica l'idea di eguaglianza si basa sul concetto di **relazione di equivalenza**.

Una relazione in un insieme è di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Gruppi e equivalenze

Simmetria

Modelli didattici
per le isometrie

Uguali e diversi

Uguali e diversi

La geometria
delle isometrie

Uguali e diversi

Gruppi e
equivalenze

Nell'insieme X delle figure del piano consideriamo \mathcal{R} definita in questo modo

$$F_1 \mathcal{R} F_2$$

se e solo se

esiste una isometria che manda F_1 in F_2

Sono proprio le proprietà di gruppo che permettono di mostrare che questa relazione è effettivamente di equivalenza.